

RESEAUX CELLULAIRES DE VORONOÏ

Baert Anne-Elisabeth,

Docteur en Informatique

Baert@laria.u-picardie.fr , +33 3 22 82 54 03

Adresse professionnelle

Laboratoire de Recherche en Informatique,

Université de Picardie Jules Verne

33 rue Saint Leu

80039 Amiens Cedex 1

Résumé : Classiquement, le modèle utilisé pour les réseaux mobiles cellulaires est le maillage hexagonal. Un modèle plus réaliste, présenté ici, est basé sur le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay. Dans le réseau mobile cellulaire de Voronoï, la taille des cellules est déterminée par deux facteurs de base : la position géographique et la zone de couverture des stations de base. Dans les réseaux cellulaires, les algorithmes de diffusion simple réalisent un arbre couvrant du graphe et la complexité de ces algorithmes est le diamètre du réseau. Nous proposons dans cet article des résultats sur l'estimation du diamètre et de l'excentricité de la triangulation de Delaunay.

Summary: The classical model used for mobile cellular networks is the hexagonal mesh. We present here a more realistic model based on Voronoï diagram and Delaunay triangulation. In Voronoï cellular networks, the feature of cell is determined by two basic factors: the geographical position and the geographical reach of the base stations. In cellular networks, one-to-all broadcasting algorithm realizes a minimum spanning tree of the network, the complexity of those algorithms is the diameter of network. In this paper, we present some results on the diameter and the eccentricity of the Delaunay triangulation.

Mots clés : Réseau cellulaire, Graphe planaire, Diagramme de Voronoï, Triangulation de Delaunay.

Keywords: Cellular networks, Planar graphs, Voronoï diagram, Delaunay triangulation

Réseaux cellulaires de Voronoï

Classiquement, le modèle utilisé pour les réseaux mobiles cellulaires est le maillage hexagonal. Un modèle plus réaliste, présenté ici, est basé sur le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay. Dans le réseau mobile cellulaire de Voronoï, la taille des cellules est déterminée par deux facteurs de base : la position géographique et la zone de couverture des stations de base. Ce réseau mobile cellulaire peut être vu comme un graphe planaire triangulaire dont les triangles ne sont pas réguliers. Dans les réseaux cellulaires, les algorithmes de diffusion simple réalisent un arbre couvrant du graphe. Pour les réseaux cellulaires de Voronoï, la complexité de ces algorithmes est alors en $O(\text{Diam}(D))$, où $\text{Diam}(D)$ représente le diamètre de la triangulation de Delaunay. Nous proposons dans cet article des résultats sur l'estimation du diamètre et de l'excentricité de la triangulation de Delaunay.

1- INTRODUCTION

Les nouveaux systèmes de télécommunications basés sur les réseaux sans fil cellulaire se sont développés rapidement, Black (1996), Lee (1996), Mac (1979). Ils ont apporté de nouveaux problèmes pour l'évaluation de la performance de tels systèmes. Le principe de la radiocommunication mobile cellulaire consiste à diviser l'espace géographique couvert par le réseau en petites zones appelées *cellules*. Afin de lutter contre la pénurie de fréquences disponibles les cellules partagent entre elles, d'une façon dynamique, les fréquences utiles entre le maximum d'utilisateurs. Ce concept repose sur une propriété essentielle des ondes électriques, celle de s'atténuer en fonction de la distance. Les *stations de base* (BTS : Base Transceiver Station) s'occupent de la transmission radio sur les cellules. Par contraste avec les réseaux stationnaires, les émetteurs d'appels sont mobiles et ne sont pas connectés par un lien physique (câble) au poste émetteur correspondant. Les réseaux de communication cellulaires sont modélisés par des graphes. Les sommets du graphe représentent les stations de base, et les arêtes sont les liens de communications.

Le phénomène principal caractérisant les *ondes radioélectriques* est son affaiblissement progressif : la puissance du signal transmis décroît proportionnellement à la distance de la source. Pour couvrir la plus grande aire possible avec un minimum de stations (sans perdre d'espaces, et minimiser les problèmes d'interférences entre les

cellules), on a recours à un pavage du plan. Si on suppose que toutes les stations émettrices ont la même puissance d'émission, on peut alors utiliser un pavage du plan régulier.

Un modèle basé sur un pavage du plan hexagonal a été introduit par Chen, Shin, et Kandlur (1990). Dans ce modèle de réseau cellulaire, il faut relier les stations émettrices voisines afin d'obtenir un pavage triangulaire du plan. On peut se reporter aux articles de Carle et Myoupo (2001), Katzela et Naghshineh (1996) ou Rappaport (1999).

Les stations de base dans un réseau mobile cellulaire de grandes tailles sont réparties de façon irrégulière. La taille des cellules doit dépendre de la densité de population et de la demande dans une région donnée. Nous présentons ici, un modèle de réseau cellulaire qui tient compte de ces deux facteurs. Ce modèle cellulaire est basé, dans un premier temps, sur le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay et tient ainsi compte de l'irrégularité de la position des stations Baccelli, Klein, Lebourges, et Zuyez (1997), Tchoumatenko (1999). Dans un second temps, nous pondérons chaque site pour tenir compte de la couverture maximale de chaque station de bases.

Les algorithmes de diffusion dans les réseaux cellulaires réalisent un arbre couvrant du graphe représentant le réseau. Dans le cas où l'algorithme est optimal, cet arbre couvrant est minimal en nombre de liens. Le diamètre du graphe correspond au nombre d'étapes nécessaires, dans le pire des cas, pour qu'un sommet diffuse un message à tous les autres sommets du réseau. La complexité de l'algorithme est alors en $O(\text{Diam}(G))$. Dans les réseaux cellulaires de Voronoï la diffusion de messages s'effectue dans la triangulation de Delaunay. En utilisant des résultats combinatoires sur la dualité du diagramme de Voronoï, nous exprimons le diamètre moyen de la triangulation de Delaunay en fonction de l'excentricité moyenne ainsi que du diamètre moyen du diagramme de Voronoï.

Le plan de l'article est le suivant. Dans la première partie, nous présentons le réseau cellulaire de Voronoï. Pour cela, nous introduisons tout d'abord le diagramme de Voronoï de puissance, puis nous présentons son dual la triangulation de Delaunay. Dans la seconde partie, nous nous intéressons au problème du diamètre de la triangulation de Delaunay. La conclusion termine l'article.

2- DESCRIPTION DES RESEAUX CELLULAIRES DE VORONOÏ

2.1- Le diagramme de Voronoï

La modélisation des réseaux mobiles cellulaires est rarement possible par le modèle classique basé sur un maillage hexagonal. Dans ce modèle, le plan est divisé en maille hexagonale de même taille et les stations de base se trouvent au centre des cellules hexagonales. Dans le réseau hexagonal chaque station possède la même puissance. La zone de couverture est représentée par le même motif : des cellules en « nid d'abeilles ».

Dans les réseaux cellulaires de grandes tailles, l'emplacement des stations de base est très irrégulier. A chaque station de base est associée une zone de couverture d'ondes. Dans les réseaux réels, les zones de couverture doivent tenir compte de nombreux facteurs comme par exemple la densité de la population, la demande des consommateurs et la topographie de cette zone. Le modèle classique basé sur les cellules hexagonales n'est pas, en ce sens, un modèle réaliste pour les réseaux cellulaires. La taille des cellules doit être proportionnelle à deux facteurs de bases : la position géographique des stations de base dans le réseau cellulaire et la couverture géographique de ces stations.

Les stations et les souscripteurs de service sont représentés par leurs coordonnées dans le plan \mathbb{R}^2 . Nous supposons que les n stations de base sont positionnées arbitrairement dans le plan. A chaque station v_i du réseau cellulaire correspond une puissance maximale notée r_i .

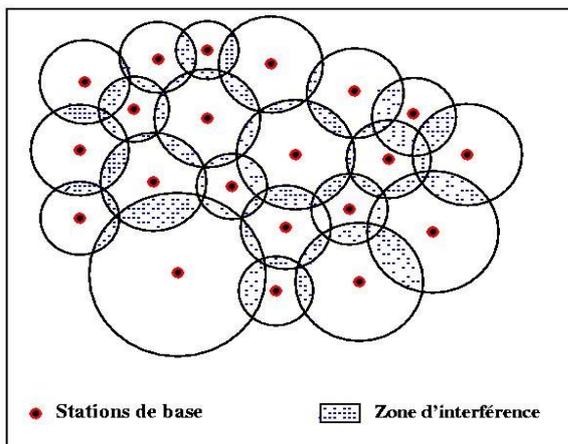


Figure 1 : Zone pavée par des cellules circulaires irrégulières

Le plan est, dans un premier temps, divisé en cellule circulaire P_i (voir Figure 1). Chacune de ces n cellules circulaires a pour centre la station émettrice v_i et pour rayon la puissance maximale r_i lui correspondant. La répartition des cellules est effectuée de telle sorte qu'il n'existe pas de zone non couverte par une station. La zone de service sera appelée *cellule de Voronoï*. Le diagramme de Voronoï généralisé peut être informellement défini comme étant un partitionnement du plan en régions, où chacune de ces régions est le lieu de points de \mathbb{R}^2 le plus proche d'un objet donné $P \in S$ que de tout autre objet $Q \in S$, pour $P \in Q$. Considérons un ensemble d'objets de S dans \mathbb{R}^2 tels que $|S| = n$.

Définition 1 : Nous définissons la médiatrice généralisée comme le lieu géométrique de points équidistants à deux objets distincts P_i et P_j d'un ensemble S d'objets :

$$B(P_i, P_j) = \{x \mid d(x, P_i) = d(x, P_j)\}$$

Cette médiatrice divise l'espace en deux demi-plans ; nous notons $H(P_i, P_j) = \{x \mid d(x, P_i) < d(x, P_j)\}$ le demi-plan contenant P_i .

Le diagramme de Voronoï généralisé pour un ensemble d'objets S est alors la collection de régions de Voronoï généralisé $V(P_i)$, $P_i \in S$ où :

$$V(P_i) = \bigcap_{P_j \in S \setminus \{P_i\}} H(P_i, P_j)$$

Nous utilisons la notation suivante : $V(S)$ est le diagramme de Voronoï formé par la réunion des régions de Voronoï de S . Une région de Voronoï d'un diagramme de Voronoï de n sites est donc obtenue par l'intersection de $n-1$ demi-plans. Cette région est représentée par un polygone convexe qui peut être non-fini.

Le diagramme de Voronoï est un *graphe abstrait*, avec pour sommets ceux du polygone de Voronoï, et comme arêtes celles des lignes polygonales (suites finies de segments consécutifs). On peut se reporter aux livres de : Preparata et Shamos (1985), Okabe, Boots et Sugihara (1992) ou Aurenhammer et Klein (2000) pour plus de détails sur les diagrammes de Voronoï.

L'une des généralisations des diagrammes de Voronoï consiste à modifier les règles de distance selon lesquelles le diagramme de Voronoï est calculé. Nous pouvons dès lors introduire le concept de *pondération* d'un site P_i qui revient à associer à chaque site un nombre réel, $w(P_i)$, appelé *poids*. La

distance depuis P_i à un point $x \in \mathbb{R}^2$ est alors mesurée comme une fonction du poids $w(P_i)$ et de la distance $d(x, p_i)$, où p_i est un *point de référence* fixe appartenant au site P_i . Lorsque P_i est un cercle, il est habituel de prendre le centre du cercle pour point de référence.

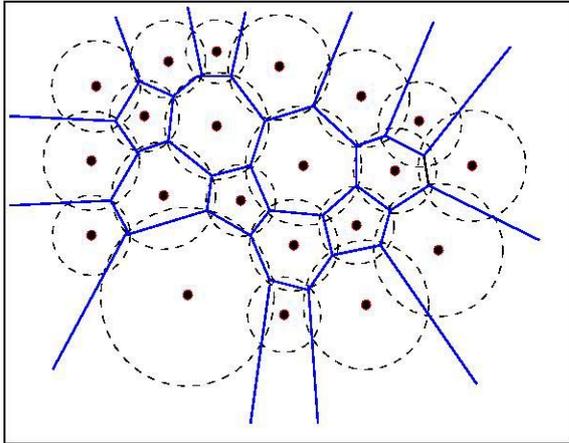


Figure 2 : Réseau cellulaire de Voronoï de puissance

La distance de puissance entre un cercle de centre p et de rayon r_p et un point x est alors défini comme :

$$d_p(x, P)^2 = \text{pow}(x, P)^2 = d(x, p)^2 - r_p^2,$$

où $d(x, p)$ est la distance Euclidienne entre x et p . L'interprétation géométrique de la distance de puissance est que la racine carrée de la distance entre x et un cercle P peut être calculée le long d'une droite tangente au cercle P . Un point x se trouve à l'intérieur du cercle P où appartient à sa fermeture si et seulement si la distance de puissance $d_p(x, P)$ est négative ou nulle.

A chaque station de base v_i , nous associons une variable r_i correspondant à la puissance maximale de cette station. Cette caractéristique peut être introduite dans le diagramme de Voronoï en considérant le *diagramme de Voronoï de puissance* ou appelé *diagramme de Laguerre*. Il peut être interprété comme le diagramme de Voronoï des cercles dans \mathbb{R}^2 , Aurenhammer (1987). Les n cellules circulaires P_i sont servis respectivement par les n stations v_i (qui se situent au centre des cellules circulaires). Le poids associé à chaque cellule P_i est alors le rayon de la cellule considérée. Les cellules P_i sont alors des *cellules de Voronoï de puissance*, elles forment une partition du plan en un ensemble de n régions polygonales que nous appelons *réseau de Voronoï de puissance* (Figure 2).

Ce réseau contient, au sens de la couverture des stations, toutes les informations de proximité d'un ensemble de stations données. Dans ce nouveau modèle de réseau cellulaire, nous devons alors relier entre elles chaque station émettrice pour obtenir un pavage triangulaire.

2.2- La triangulation de Delaunay

Une autre structure fondamentale en géométrie algorithmique est la *triangulation de Delaunay*. En 1934, Delaunay a prouvé le théorème suivant :

Théorème 1 :

Le dual d'un diagramme de Voronoï d'un ensemble S de points est une triangulation de S .

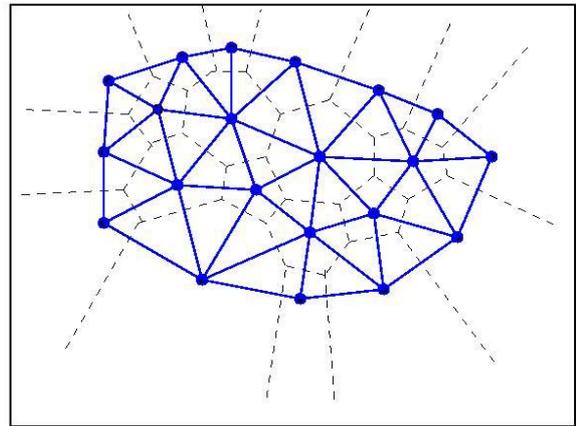


Figure 3 : Triangulation de Delaunay des stations

Le *graphe de Delaunay*, noté D , est par construction un graphe planaire triangulaire (Figure 3). Il est obtenu en joignant tous les couples de points de S dont les polygones de Voronoï partagent une arête commune. C'est un cas particulier du dual d'un graphe planaire. Si G est un graphe planaire, nous obtenons le graphe *dual* de G en considérant chaque couple de faces partageant une même arête : nous choisissons un point à l'intérieur de chacune des deux faces et nous joignons ces deux points par un *arc de Jordan*. Le graphe triangulaire de Delaunay s'appelle le dual par ligne droite du diagramme de Voronoï : on joint par un segment deux points de S dont une arête de Voronoï est la médiatrice du segment. Trois arêtes de Voronoï concourent en x de S en tant que médiatrices des trois cotés d'un triangle de Delaunay dont x est le centre du cercle

circonscrit, appelé *cercle de Delaunay* de x .

3- RESULTATS SUR LE RESEAU CELLULAIRE DE VORONOÏ

Dans cette section nous proposons des résultats sur l'estimation du diamètre et de l'excentricité de la triangulation de Delaunay. Le diamètre et le degré moyen d'un graphe sont des paramètres très liés dans la théorie des graphes. Le diagramme de Voronoï fini est un graphe 3-régulier. En utilisant cette propriété, nous allons déterminer le diamètre du diagramme de Voronoï en utilisant les propriétés de dualité entre la triangulation de Delaunay et les diagrammes de Voronoï.

3.1- Arbre couvrant de Voronoï

Nous considérons une courbe fermée simple, notée Γ autour de la partie « intéressante » du diagramme de Voronoï, de telle sorte que cette courbe n'intersecte que les arêtes infinies du diagramme de Voronoï. Si nous enlevons les demi-droites en dehors de Γ , nous obtenons un graphe connexe planaire avec $n_D + 1$ faces, où n_D est le nombre d'arêtes de la triangulation de Delaunay. Ces faces sont les n_D régions de Voronoï auxquelles nous ajoutons la face infinie (celle en dehors de Γ). Ce graphe est appelé le *diagramme de Voronoï fini*, Fortune (1992).

Proposition 1 :

Soient e_V et n_V le nombre d'arêtes et de sommets dans le diagramme de Voronoï. Soient $Cont(V)$ le nombre d'arêtes dans Γ , et $n_{V_{fini}}$ le nombre de sommets dans le diagramme de Voronoï fini. Nous avons les relations suivantes :

$$e_V = \frac{3}{2}n_V,$$

$$n_V = Cont(V) + n_{V_{fini}},$$

$$n_D = \frac{n_{V_{fini}}}{2} + 1.$$

Preuve :

Comme le diagramme fini de Voronoï est un graphe planaire, nous pouvons utiliser la formule d'Euler :

$$n_{V_{fini}} + F_{V_{fini}} = e_{V_{fini}} + 1,$$

où $e_{V_{fini}}$ et $F_{V_{fini}}$ sont le nombre d'arêtes et de faces du diagramme de Voronoï fini.

Par dualité le nombre d'arêtes dans une triangulation de Delaunay est le même que dans un diagramme de Voronoï.

□

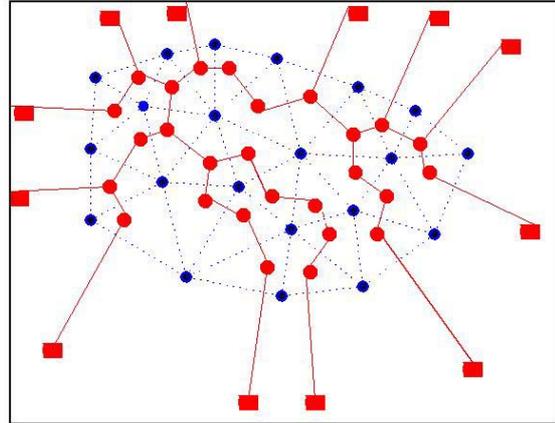


Figure 4 : Arbre couvrant de Voronoï

Les diagrammes de Voronoï finis sont des graphes 3-réguliers; tous les sommets dans le diagramme de Voronoï sont de degré trois. Si nous construisons un arbre couvrant dans ce graphe, les sommets de cet arbre ne peuvent pas avoir plus de trois successeurs. Cet arbre couvrant est appelé un *arbre unaire-binaire* (Figure 4). Chaque sommet de cet arbre couvrant se situe à l'intérieur d'un triangle de la triangulation Delaunay. Pour chaque triangle deux de ses cotés sont « coupés » par deux arêtes de l'arbre couvrant.

3.2- - k-chemin de triangles

Si nous considérons un chemin (ou une branche) dans cet arbre couvrant de Voronoï (Figure 5), ce chemin est connu sous le nom de *chemin triangulaire* ou *t-chemin*, voir Aichholzer (1999).

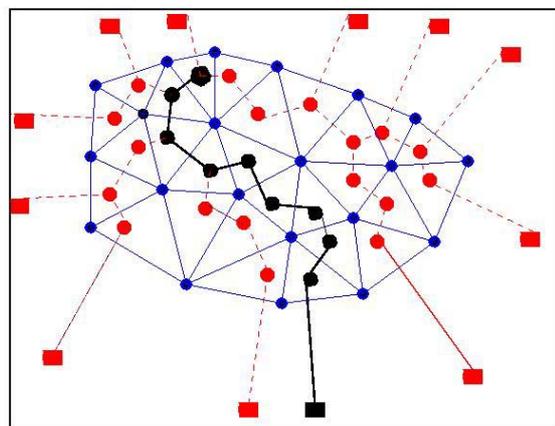


Figure 5 : t -chemin dans un arbre couvrant de Voronoï

Définition 1 :

Soit un t -chemin de longueur $k-1$ Nous appelons k -chemin de triangles, l'ensemble des triangles coupés par ce chemin, et nous notons Φ_k l'ensemble des triangles formés par cette construction.

Remarque :

Il existe une dualité entre un k -chemin de triangles (Figure 6) et un t -chemin de longueur $k-1$.

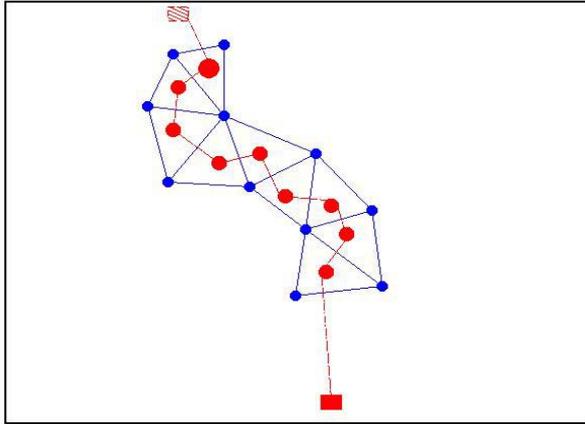


Figure 6 : k -chemin de triangles

Proposition 2 :

Soient F_{Φ_k} , e_{Φ_k} , v_{Φ_k} le nombre de faces, d'arêtes et de sommets dans un k -chemin de triangles. Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_{\Phi_k} &= k, \\ e_{\Phi_k} &= 2k + 1, \\ v_{\Phi_k} &= k + 2. \end{aligned}$$

Preuve :

Un k -chemin de triangles, Φ_k , contient, par définition, k triangles et donc k faces (si on ne compte pas la face infinie). Chacune de ces faces est un triangle avec 3 arêtes, et dans chaque triangle une de ses arêtes est comptée deux fois (sauf le premier triangle du k -chemin de triangles). Nous avons donc

$$3k - (k-1) = 2k + 1$$

arêtes.

Par induction sur k , on montre que le nombre de sommets est :

$$2k + 1 - (k-1) = k + 2.$$

□

3.3.–Excentricité et diamètre de la triangulation de Delaunay

L'excentricité d'un sommet dans un graphe de Voronoï peut être calculée comme étant la hauteur de l'arbre couvrant de Voronoï enraciné en ce sommet. La dualité établit entre un k -chemin de triangles et un t -chemin de longueur $k-1$ va nous permettre de calculer la longueur d'une branche d'un arbre couvrant de Voronoï.

Lemme 1 :

Soient i et j deux sommets dans une triangulation de Delaunay., Il existe un t -chemin de longueur $k-1$, noté α_k , tel que i et j appartiennent au k -chemin de triangles associé à α_k et $d(i, j) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$.

$$d(i, j) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1.$$

Preuve :

Comme un k -chemin de triangles contient $k+2$ sommets, le nombre d'arêtes externes est aussi $k+2$. Il est connu que le diamètre d'un anneau de k sommets est

$$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

□

Nous notons $\overline{ecc}(G)$ et $\overline{diam}(G)$ l'excentricité moyenne et le diamètre respectif d'un graphe G .

Théorème 1 :

$$\overline{diam}(D) \approx \frac{\overline{diam}(V)}{2},$$

$$\frac{\overline{ecc}(V)}{2} \leq \overline{diam}(D) \leq \overline{ecc}(V).$$

Preuve :

Le diamètre d'un graphe est par définition le plus long des plus courts chemins d'un graphe. La relation établie dans le théorème 1 nous permet d'estimer le diamètre de Delaunay en fonction du diamètre de Voronoï

Les relations entre l'excentricité et le diamètre moyen, nous permettent d'écrire, Harary (1994) :

$$\overline{ecc}(V) \leq \overline{diam}(V) \leq 2\overline{ecc}(V).$$

□

4- CONCLUSION

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à un nouveau modèle pour les réseaux mobiles cellulaires : le modèle de Voronoï de puissance. Les algorithmes de diffusion simple dans un réseau cellulaire réalisent un arbre couvrant de taille minimal dans le réseau. L'optimalité de la diffusion est effective lorsque l'algorithme a une complexité en diamètre du réseau.

Nous avons présenté les premiers résultats théoriques sur l'estimation de l'excentricité et du diamètre de la triangulation de Delaunay. Des résultats expérimentaux ont déjà été obtenus pour le diamètre et l'excentricité des réseaux de Voronoï dans Baert, Semé (2003).

BIBLIOGRAPHIE

- Aichholzer, O., (1999) « The path of triangulations », Dans 15th Ann. ACM Symp. Computational Geometry, p. 14-23.
- Aurenhammer F. et Klein R., (2000), « Handbook of Computational Geometry: Voronoi diagrams, chapitre 5, p. 201--290. Elsevier Science Publishing. J. Sack and G. Urrutia,
- Aurenhammer, F., (1987), "Power diagrams: properties, algorithms, and applications." SIAM Journal on Computing, 16: p. 78--96.
- Baccelli, F., Klein, M., Lebourges, M. et Zuyev, S., (1997); "Stochastic geometry and architecture of communication networks", Journal of Tel. Systems, 7, p. 209--227.
- Black, U. (1996), "Mobile and Wireless Networks", Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ.
- Baert A.E., et D. Semé, (2003) "One-to-all broadcasting in Voronoi cellular networks", Dans "The 2003 International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications (PDPTA'03), Las Vegas (USA), p. 844-850.
- Baccelli F., et Zuyev, S. (1997) "Stochastic Geometry Models of Mobile Communication Networks", Dans Frontiers in queueing, p. 227--243.
- Carle, J., Myoupo, J.F., et Semé, D., (2001), "A Basis for 3-D Cellular Networks" Dans Proc. of the 15th International Conference on Information Networking.
- Chen, M.S., Shin, K.G. et Kandlur, D.D, (1990) "Addressing, Routing and Broadcasting in Hexagonal Mesh Multiprocessors", IEEE Trans. on Computers, 39(1): p. 10--18.
- Delaunay, D., (1934), « Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï », Izvestia Akademia Nauk SSSR Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk, 7:p. 793—800.
- Fortune, S., (1992), « Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. » Dans Ding-Zhu Du et Frank Hwang, éditeurs, Computing in Euclidean Geometry, volume1. World Scientific, Lecture Notes Series on Computing.
- Harary, F., (1994), « Graph Theory », Addison Wesley, Reading, MA.
- Katzela I. et Naghshineh., M., (1996), "Channel Assignment Schemes for Cellular Mobile Telecommunications", Systems: A Comprehensive Survey, IEEE Personal Communications Magazine, 3 :p. 10--31.
- Lee, W., (1996), "Mobile Cellular Telecommunications Systems", McGraw-Hill, New York, 2^{ème} Edition.
- MacDonald., V., (1979) "Advance Mobile Phone Service: The cellular concept", Bell System Technical Journal, 58(1): p.15--41 .
- Okabe, A., Boots, B., et Sugihara, K., (1992), "Spatial tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams", John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1992.

Preparata, F.P., Shamos, M.I., (1985), "Computational Geometry: an introduction", Springer Verlag, New-York.

Rappaport, T., (1999), "Wireless Communications: Principles and Practice", Prentice-Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, Reprinted.

Tchoumatchenko, K., (1999), "Modeling of Communication Networks Using Stochastic Geometry", Thèse de doctorat, Univeristé de Nice-Sophia Antipolis, France.