Les TICE dans l'enseignement des mathématiques et de la statistique en sciences humaines et sociales

El Methni Mohamed
Mohamed.Elmethni@upmf-grenoble.fr

Laboratoire LJK Equipe SF&F

Introduction

Aujourd'hui l'usage des mathématiques et de la statistique est de plus en plus présent dans nos sociétés. Au niveau de l'individu cet usage peut être voulu et souvent subi. Institutions et médias diffusent régulièrement et sur différents supports de l'information sous forme de « diagramme », « pourcentage », « moyenne », « taux », « indice », « tendance » etc. Parallèlement de plus en plus de disciplines font appel aux modèles et techniques mathématiques. Cet appel est souvent amplifié par la puissance du traitement informatique en progression soutenue.

Les étudiants en sciences humaines et sociales doivent acquérir des connaissances et des techniques propres aux sciences dites exactes ou « dures ». Ils sont confrontés à l'assimilation et à l'utilisation de ces techniques et à l'interprétation des résultats qui en découlent.

L'université et d'autres institutions sont confrontées à un problème de formation. Cette formation met en jeu deux acteurs : L'étudiant qui souvent est issu d'études littéraires ou sociales ayant une formation mathématique souvent insuffisante. L'enseignant souvent recruté pour ses qualités de chercheur, et qui se trouve confronté à un problème pédagogique : Comment enseigner et transmettre un savoir réputé difficile à un public, pour le moins, non averti ?

Le cloisonnement des disciplines, le manque de temps ou de curiosité et d'autres facteurs contribuent à isoler l'enseignant. Les discussions et les recherches pédagogiques interdisciplinaires sont confidentielles. L'improvisation est le maître mot.

L'avènement de l'informatique et plus particulièrement les nouvelles technologies de l'information et de la communication semblent se saisir du problème plus général de l'apprentissage. Les premières réalisations sont analogues à celles apportées par l'invention de l'imprimerie et l'édition. Elles consistent essentiellement à mettre à disposition des apprenants de la documentation. Les innovations sont le fruit des possibilités techniques propres au changement de support de cette documentation : Mise en ligne de textes plus ou moins enrichis de sons, vidéo etc.

Quelles sont les innovations pédagogiques qui accompagnent ces réalisations ? Peut-on agir sur la relation que crée l'enseignant entre le contenu de son cours et son cours proprement dit ? Ne dis-t-on pas souvent que l'enseignant est un acteur ? Constamment il doit s'adresser aux mécanismes cognitifs de l'étudiant à travers ses sens mais aussi en jouant (comme un acteur !) sur le contexte. L'analogie avec l'avènement du support édité (le livre) nous apporte un premier éclairage. Une simple observation du « livre » à travers son histoire montre une absence totale de tentative de « simuler » le rôle de l'enseignant. Ce vide est compensé par un foisonnement de graphismes (images et illustrations) et d'animations (mécaniques et même audio). L'approche étant souvent ludique. Le livre reste un support passif pour l'étudiant. Cette « indigence » trouve-elle son explication dans les possibilités fort restreintes qu'offre l'édition imprimée où est-elle due plus fondamentalement à notre méconnaissance des processus d'apprentissage (si processus il y a ?)[1]

Les possibilités du numériques ne semblent limitées que par les limites de leurs utilisateurs. Comment s'en servir pour (par exemple) tout simplement faire un cours compréhensible de statistique élémentaire à des étudiants de première année de psychologie ? Voici la question que je me suis posée il y a quelques années.

Ce travail résume une activité de prospective, de recherche et d'expérimentation de méthodes pédagogiques dans l'enseignement des mathématiques et des statistiques s'adressant à des étudiants de sciences humaines et sociales. Il comporte un volet important d'utilisation des nouvelles technologies. Cet article concerne essentiellement ce volet.

Public :

Etudiants en sciences humaines et sociales (psychologie, sociologie, philosophie etc.) du niveau Licence L1 à Master M2.

Réalisation : (opérationnelles, d'autres sont en cours)

- Sept leçons portant sur les thèmes suivants :
- Observations et mesures
- Graphiques
- Pourcentages
- Moyennes
- Dispersion
- Réseaux sociaux et théorie des graphes
- Comparaison, ordres et classifications

Chaque leçon (d'une durée de 10 heures à 50 heures) propose :

Une partie « classique » :

- Des documents : A imprimer ou interactifs (du cours)
- Des exercices : A imprimer ou en autocorrection et autoévaluation
- Des diapositives : A visualiser en diaporama

Une partie « innovante » :

C'est un mélange hétéroclite basé sur les nouvelles technologies pour mettre en œuvre certaines idées pédagogiques telles que :

- Mettre en situation
- Participation directe ou indirecte
- Le contexte historique
- « Secouer » l'évidence
- Réduction et simplification
- Métaphores et analogie
- Questions ouvertes
- Paradoxes
- Modèle et modélisation

[1] Durant tout mon travail de réflexion pédagogique, j'ai fait le choix de ne m'inspirer d'aucune recherche didactique ou autre. Le but étant de rester « disciplinairement cohérent » (Je suis enseignant chercheur en mathématiques pures)

Les objets mathématiques et leurs présentations :
L'activité mathématique peut se décliner en trois étapes : *concevoir* (*construire*) des objets mathématiques, *mettre* en relation ces objets et *produire* des tautologie sur ces relations. Cette déclinaison est en réalité simpliste. Les trois étapes sont des processus qui s'imbriquent et s'engendrent. Ainsi les tautologies sont injectées, sous formes de théorèmes, et produisent de nouveaux objets et relations pour aboutir à un cycle « autonome » indéfiniment reproductible. L'étape de la *conception* (*construction*) des objets se limite essentiellement à leur définition. En dehors des objets produits « en interne » certains objets ont été à la base de l'activité mathématique. Il en est ainsi de l'objet « point », de l'objet « droite », de l'objet « nombre » etc. Est-ce des objets *naturels* ? Que représentent-ils ? Comment les définir ? La communauté mathématique est consciente que la définition de l'objet « *droite* » n'est présente dans aucun livre ni manuel de l'école primaire et du collège. L'approche intuitive est privilégiée et une approche analytique est esquissée au lycée sous forme « d'ensemble de *points* ». Mais alors qu'en est-il de l'objet « *point* » ? A-t-il jamais été défini ? Et l'objet « *nombre* » ? Laissons la réponse à un spécialiste Christian Houzel, qui à la fin d'une interview de quatre pages (La recherche N°281 Novembre 1995) conclue « Il ne faut pas se leurrer, en dernier ressort on ne sait pas très bien »

Un exemple de définition (classique) :

Observons un enseignant de statistique s'adressant à des étudiants de 1ère année sociologie (par exemple). Ce jour là notre enseignant a l'intention de parler de « moyenne(s) ». Le plus simple pour lui (de façon classique et universelle !) est de donner une définition usuelle de la moyenne (arithmétique) telle que :

Définition : la moyenne arithmétique de n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Il complète sa définition par un ou deux exemples numériques et éventuellement par un ou deux exemples empruntés à la discipline principale de ses étudiants (par exemple calcul de la moyenne des salaires par catégorie professionnelle)

Tout ceci peut être numérisé agrémenté d'un habillage attractif et mis à la disposition des étudiants. On y ajoute souvent des utilitaires d'aide au calcul.

Analysons cette approche qualifiée de classique. L'enseignant a défini la moyenne arithmétique par une « formule ». Au-delà des difficultés inhérentes aux notations (aspect loin d'être négligeable) par cette approche l'enseignant n'a fait qu'indiquer comment on calcule un nombre et ce nombre s'appelle la moyenne. C'est donc une approche qui *construit* l'objet mais ne dit rien sur l'objet. Comment l'étudiant va-t-il l'interpréter ? On peut penser, et c'est souvent le cas, que l'enseignant, toujours de façon classique, va dégager les principales propriétés de la moyenne et amener les étudiants à interpréter la moyenne par ses propriétés.

Un exemple d'une nouvelle approche de la définition :

Quand cela est possible, et c'est souvent le cas, on mettra les étudiants **en situation**. En effet si l'on éprouve le besoin de définir un nouvel objet c'est que cette définition s'impose pour la suite de l'exposé, elle a une « utilité ». Il suffit de mettre en scène la situation qui l'impose.

C'est dans ce cadre que les nouvelles technologies peuvent être d'apport considérable.

Scénario pédagogique :

L'enseignant aura préparé un ensemble d'outils dont on prendra connaissance au fur et à mesure de la description de cette nouvelle approche.

L'acteur entre en scène. Il cherche (fait semblant) un objet dont il veut mesurer la longueur avec une règle (un double décimètre). Il opte pour le tableau ou la table (objets toujours présents dans une salle de cours ou un amphithéâtre). Il demande aux étudiants de passer successivement et de mesurer la longueur de la table (ou le tableau) de le noter sur un bout de papier et de le lui donner sans communiquer le résultat de sa mesure aux autres étudiants. S'assurant ainsi de l'indépendance des mesures. L'enseignant fera passer ainsi un certain nombre d'étudiants. Tout en le déclamant il saisit les mesures qui lui ont été fournies. L'affichage montre une différence entre les mesures effectuées. Quoique statistiquement l'égalité de toutes les mesures est (presque) impossible, notre enseignant participera lui-même à la mesure pour forcer le destin et aura préparé une série de mesures adéquates pour le reste de son cours.

Evidemment la question qu'il posera est : Cette table a une longueur bien définie, j'ai plein de mesures différentes que fait-on ?

L'enseignant aura préparé une vidéo montrant la participation d'un grand nombre de volontaires effectuant une mesure (deux ou trois versions selon l'objet à mesurer) pour la raison évidente qu'il n'est jamais sûr de la coopération des étudiants, mais surtout que les mesures sur lesquels il va travailler auront été choisis avec un soins particulier !

La diffusion de cette vidéo, avec les bonnes techniques de mise en scène telle des accélérations et des gros plans bien choisis justifiera la série de mesures qui sera affichée à la suite. Série choisie avec un soin particulier comme il a été dit plus haut.

Cette table a une longueur bien définie, j'ai plein de mesures différentes que fait-on ? Voilà la question centrale sur laquelle notre enseignant va insister.

« Evidemment » que la « moyenne » sera la réponse la plus probable. D'une part cela est du au passé scolaire des étudiants (moyenne semestrielle, annuelle etc.) et d'autre part le contexte, les étudiants sachant par exemple que le cours devait porter sur les moyennes.

Secouer l'évidence c'est de dire non je ne vois pas pourquoi on prendra pour mesure de la longueur de la table la moyenne arithmétique des longueurs. L'impact est garanti. Pourquoi en effet prendrait-on la moyenne ? (Ceci peut-il être scénarisé sans la présence de l'enseignant ? et quel effet produira-t-il ?). L'enseignant ne va pas manquer d'aiguiller les étudiants vers d'autres directions. Il suggèrera une règle majoritaire en faisant remarquer que dans la série des mesures une valeur est beaucoup plus présente que les autres (le mode). Un affichage d'un simple diagramme en bâtons est plus que convainquant. L'enseignant pourra enchaîner sur des mathématiques « démocratiques » où la majorité a raison, rien de tel pour détendre l'atmosphère et captiver l'attention. Il va de soi que l'affichage d'une autre série bien choisie rompra le charme en donnant deux (ou plus) valeurs « majoritaires » (distribution bimodale ou plurimodale). Un autre aiguillage suggéré par l'enseignant est une valeur centrale comme le milieu ou la médiane avec des remarques appropriées finira par laisser les étudiants perplexes. Néanmoins ils commenceront à se dire, guidés par l'enseignant, qu'en fait il y a deux questions.

Quelle est la « vraie » longueur de la table ?

Quelle mesure peut-on prendre comme longueur de la table ?

<u>Un premier but est atteint !</u>

Après avoir fait remarquer aux étudiants qu'ils ont à réfléchir quant aux causes possibles de la variabilité des mesures et après avoir donné quelques références de lectures et incité les étudiants à revoir la leçon « Observations et mesures » pour abandonner définitivement l'idée de connaître la « vraie » longueur de la table l'enseignant fera remarquer que le vrai problème est un problème de synthèse : « on cherche à <u>résumer</u> une série de mesures ». Ici une animation (style Flash) d'une étrange machine qui après avoir avalé des nombres crache un nombre-résumé. Avant d'avoir les outils performants actuels je réalisais l'animation avec un vrai vieux moulin à café, je dois avouer que l'effet n'a jamais été égalisé par toutes les animations numériques ! Suivra par la suite la partie du cours relative au choix du résumé : pourquoi un résumé et selon quelles règles.

Le **contexte historique** trouve naturellement sa place à ce niveau du cours. Il suffit de poser la question : « Au fait savez-vous d'où vient ce concept de moyenne et qui le premier en a eu l'idée et quand l'a-t-on définitivement adopté en statistique ? » Je suis toujours perplexe devant la propension d'une grande majorité d'enseignants à négliger l'histoire ou du moins l'historique des objets qu'ils manipulent. Comme il a été dis plus haut la définition des objets s'impose par utilité, ceci justifie pleinement de situer l'objet (par exemple la moyenne dans notre cas) par son histoire. Quelques diapositives bien choisies relateront l'histoire moderne du « procès des étoiles ». Un résumé de l'expédition (16 Mai 1735) en Equateur pour vérifier la forme aplatie de la planète Terre aux pôles insistera sur l'aventure scientifique et humaine qui finira par imposer définitivement la moyenne arithmétique (théorème central limite). Quelques autres diapositives remonteront à l'origine géométrique de certaines moyennes notamment une allusion sera accordée à la moyenne harmonique dans l'école pythagoricienne.

A ce niveau du cours aucune définition de la moyenne arithmétique n'a été donnée aux étudiants. L'enseignant ne manquera pas de le signaler et fera bien remarquer qu'il est temps de « savoir de quoi on parle ».

Etudier un problème peut commencer par sa **réduction** à des cas plus **simples**. Il peut en être ainsi aussi de la définition. L'enseignant commencera donc par deux mesures dont il veut définir la moyenne (arithmétique).

Si on considère que l'apprentissage par **métaphore et analogie** est de se baser sur des connaissances acquises dans d'autres domaines pour en acquérir dans un nouveau, on ne manquera pas de faire appel à des acquis antérieurs pour amener les étudiants vers d'autres. Notre enseignant se munira d'une balance à deux plateaux (de Roberval) de deux sachets différents de semoule (sucre, farine, sel etc.) dont il disposera le contenu sur chacun des deux plateaux. La balance penchera d'un côté mettant en évidence la différence des deux poids. Ceci est parfaitement réalisé par les nouvelles technologies sous forme de vidéo ou d'animation. En transvasant la semoule d'un plateau à un autre on finit par une position d'équilibre (égalité des poids). Tout en signalant que cette opération s'est effectué « à budget constant » sans perte ni d'ajout de semoule, l'enseignant fera remarquer que : « **Deux fois** la quantité de semoule sur un plateau est égale à la **somme** des deux quantités d'origine » Autrement dit ce que l'un des plateaux a perdu c'est l'autre plateau qui l'a récupéré. Avec la magie du numérique on peut repasser la même vidéo avec une couleur différente pour la quantité de semoule transvasée. Une autre façon de voir les choses « les deux quantités d'origine s'écartaient de l'équilibre d'une certaine quantité, l'un des plateau était en excès et l'autre en défaut mais de la **même** quantité ». L'expérience montre qu'une bonne proportion des étudiants commence à trouver des difficultés. Cette difficulté naissante est anticipée et même voulue par l'enseignant. Cette approche se caractérise par une absence totale de nombres et d'activité numérique néanmoins on parle de **Deux fois** et **somme**. Il est alors temps de renvoyer les étudiants vers les leçons « observations et mesures » et « comparaison, ordre et classification » et les inviter à classer trois sachets (ou plus) par ordre de poids à l'aide d'une balance à deux plateaux. Un programme de simulation est à leur disposition.

La moyenne arithmétique peut alors être définie comme étant cette quantité qui correspond à l'équilibre. L'analogie avec le centre de gravité peut être évoquée. « Ce que l'on perd d'un côté on le récupère de l'autre » C'est peut-être intéressant mais combien a-t-on perdu (ou gagné) ? Si les poids des sachets étaient p_1=110 grammes et p_2=130 grammes et si p désigne la moyenne arithmétique des deux poids alors :

Avec la formulation : « **Deux fois** la quantité de semoule sur un plateau est égale à la **somme** des deux quantités d'origine » on a : $2p= p_1+ p_2$ et donc $p= ½(p_1+ p_2)= ½(110+130)=120$

Avec la formulation : « Ce que l'un des plateaux a perdu c'est l'autre plateau qui l'a récupéré » on a, en désignant par e la quantité perdue ou gagnée : $p=p_1+e= p_2–e$ et donc $2e= p_2- p_1$ et par conséquent $e=½(p_2- p_1)= ½(130-110)=10$

Tout ce passe donc comme « **Deux** 120 valent **un** 110 et **un** 130 »

Ou comme « les écarts à la moyenne se neutralisent : (130-120)+(110-120)=0

Etant données deux nombres $x_1+ x_2$ leur moyenne arithmétique est le nombre m tel que la somme des écarts à cette moyenne est nulle : $(x_1 - m)+(x_2 - m)=0$ en développant on a $2m=x_1+x_2$ d'où $m=½(x_1+ x_2)$. Le lien avec la formule classique est ainsi établi dans ce cas particulier :

Les questions ouvertes sont toujours stimulantes : Une situation pédagogique intéressante parfaitement réalisable grâce aux nouvelles technologies est de disposer d'une salle équipée en terminaux commandés par l'enseignant. Le programme de simulation permet aux étudiants d'essayer de réfléchir à un deuxième problème qui mettra les étudiants dans une situation délicate. Peut-on ordonner avec une balance à deux plateaux trois quantités initialement distinctes ? Peut-on équilibrer avec une balance à deux plateaux trois quantités initialement distinctes ? Il s'agit d'amener les étudiants à se poser la question « peut-on former le tiers avec une succession de moitiés ? » et éventuellement à concevoir une balance à trois plateaux (isobarycentre).

Le même problème peut être présenté sous la forme suivante : un instituteur remet à chacun de ses élèves leur trois notes de la semaine et leur demande de calculer leur moyennes à l'aide uniquement d'addition et de soustractions (on peut imaginer que ces élèves n'ont pas encore appris la division). Les étudiants n'auront aucune difficulté à résoudre ce problème en diminuant les notes fortes pour augmenter de la même quantités les notes plus faibles et vérifierons aisément que la somme des « transferts » est nulles.

Le même problème se généralise à plusieurs notes et la notion de « somme de valeurs centrées est nulle » est acquise et le concept barycentrique de la moyenne est assimilé.

La moyenne arithmétique de n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est le nombre m tel que la somme des écarts à ce nombre (la somme des valeurs centrées) est nulle.

$(x_1-m)+(x_2-m)+\ldots+(x_n-m)=0$ d'où en développant $x_1+x_2+\ldots+x_n-m-m\ldots-m=0$

Ou encore $x_1+x_2+\ldots+x_n-nm=0$ d'où $x_1+x_2+\ldots+x_n=nm$ et donc $m=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

Les **paradoxes** sont souvent faciles à énoncer et leur effet est instantané. On ne comprend pas mais on sent un problème ! Dans l'approche précédente la moyenne arithmétique se situe à mi-chemin entre les deux valeurs. On désire se rendre d'un point A (une ville) à un point B (une autre ville). On peut se situer dans le temps et parler de mi-chemin quand on aura mis la moitié du temps prévu. On peut aussi se situer dans l'espace et on parlera de mi-chemin quand on aura parcouru la moitié de la distance. Y'a-t-il équivalence des deux ? Autrement dis a-t-on la même notion de moyenne ?

Cette situation peut être mise en scène (vidéo, animation etc.) par une course cycliste autour d'un anneau olympique. On présente un journaliste qui rend compte en temps réel de la course : « C'est fantastique ! Notre champion à effectué le premier tour de piste à la vitesse fantastique de 30 Km/h et le voilà qui bat tous les records en terminant le deuxième tour de cette piste à la vitesse fulgurante de 40Km/h. C'est absolument incroyable ! Il a réalisé les deux tours à la vitesse moyenne de 35 Km/h …. »

Notre enseignant demandera aux étudiants s'ils sont d'accord avec le journaliste. Différentes simulations mettront les étudiants devant une réalité difficile à accepter : Non la vitesse moyenne n'est pas la moyenne des vitesses !

En se situant à mi-chemin dans l'espace puis dans le temps l'enseignant introduira la moyenne harmonique. Il fera le lien avec l'école pythagoricienne et le début de la mathématisation de la musique.

De même, et toujours grâce aux moyens nouveaux et puissants dont il dispose, notre enseignant introduira les différentes autres moyennes, établira des propriétés, parlera des effets de structure, de l'effet Quételet etc.

Conclusion :

Cet exemple, extrait de la leçon « Moyennes » illustre quelques idées centrales de l'approche de l'enseignement de la statistique (et des mathématiques) par une utilisation judicieuse des nouvelles technologies. Ces nouvelles technologies apportent une aide considérable à l'enseignant qui reste au centre du scénario. Il reste le chef d'orchestre en créant l'évènement au moment propice. Le comportement des étudiants en accès individuel sans la présence de l'enseignant est différent. La passivité déjà observée par ailleurs prend le dessus. La lecture séquentielle est de mise. La dynamique d'un cours reste l'œuvre exclusive de l'enseignant.